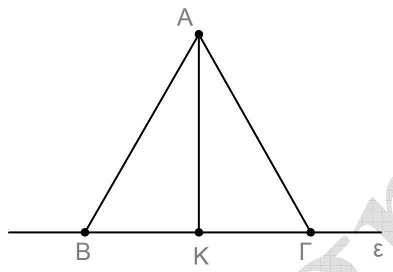
3.13 – 3.16

ΘΕΩΡΙΑ

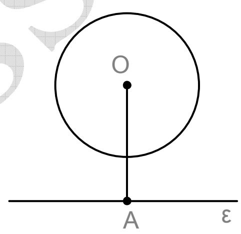
1.
Θεωρήματα με βάση την $AK \perp \varepsilon$

- $AK < AB$
- $AB = A\Gamma \Leftrightarrow KB = K\Gamma$
- $AB < A\Gamma \Leftrightarrow KB < K\Gamma$

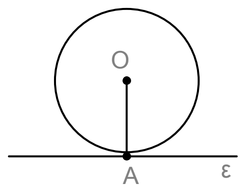


2.
Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου
Έστω ΟΑ η απόσταση του κέντρου Ο από την (ε)

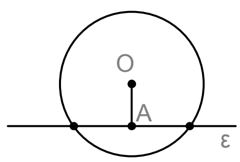
- $OA > R \Leftrightarrow$ ε εξωτερική ευθεία του κύκλου (κανένα κοινό σημείο)



- $OA = R \Leftrightarrow$ ε εφαπτομένη ευθεία του κύκλου (ένα μόνο κοινό σημείο)

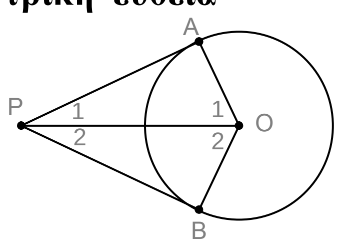


- $OA < R \Leftrightarrow$ ε τέμνουσα του κύκλου (δύο ακριβώς κοινά σημεία)



3.
Εφαπτόμενες και διακεντρική ευθεία

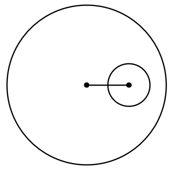
- $PA = PB$
- $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$



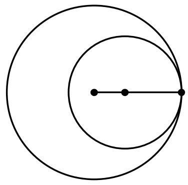
4.

Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

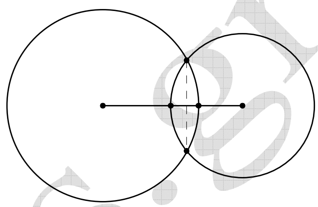
- Ο ένας στο εσωτερικό του άλλου $\Leftrightarrow$ $\delta < R - \rho$



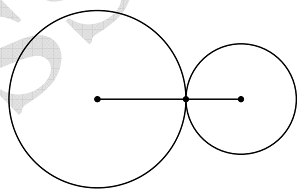
- Εφαπτόμενοι εσωτερικά $\Leftrightarrow$ $\delta = R - \rho$
  Η διάκεντρος διέρχεται από το σημείο επαφής



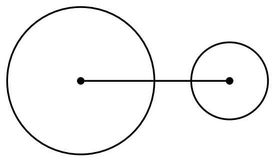
- Τεμνόμενοι $\Leftrightarrow$ $R - \rho < \delta < R + \rho$
  Η διάκεντρος είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής



- Εφαπτόμενοι εξωτερικά $\Leftrightarrow$ $\delta = R + \rho$
  Η διάκεντρος διέρχεται από το σημείο επαφής



- Ο ένας στο εξωτερικό του άλλου $\Leftrightarrow$ $\delta > R + \rho$



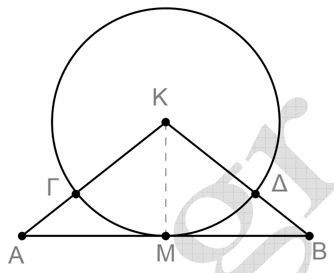
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται κύκλος (K, ρ) και εφαπτομένη του (ε) σε σημείου του M. Δύο σημεία A και B της (ε) είναι συμμετρικά ως προς το M. Αν τα ευθύγραμμα τμήματα AK και BK τέμνουν τον κύκλο στα Γ και Δ αντίστοιχα, δείξτε ότι $A\Gamma = B\Delta$.

Προτεινόμενη λύση

Φέρνω την ακτίνα KM στο σημείο επαφής M, τότε είναι $KM \perp AB$ και επειδή τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς το M, το M είναι μέσο του AB.



Επειδή λοιπόν το KM είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου KAB, το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές. Οπότε $KA = KB$

$$\rho + A\Gamma = \rho + B\Delta$$

$$A\Gamma = B\Delta$$

2.

Δύο ομόκεντροι κύκλοι τέμνονται από μία ευθεία (ε) κατά σειρά στα σημεία A, B, Γ, Δ. Να αποδείξετε ότι $AB = \Gamma\Delta$

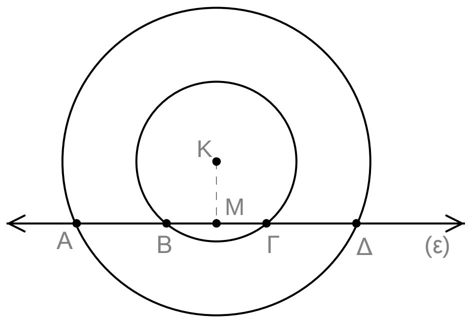
Προτεινόμενη λύση

Το κοινό απόστημα KM των χορδών $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι μεσοκάθετος κάθε χορδής.

Άρα $AM = M\Delta$ και $MB = M\Gamma$.

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε

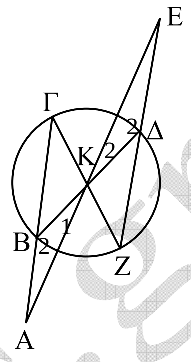
$AM - MB = M\Delta - M\Gamma \Rightarrow AB = \Gamma\Delta$



3.

Δίνεται κύκλος (K, ρ) και ένα σταθερό σημείο A με $KA > \rho$. Μεταβλητή ευθεία από το A τέμνει τον κύκλο στα B και Γ. Αν Δ και Z είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔZ διέρχεται από σταθερό σημείο.

Προτεινόμενη λύση



Έστω ότι η AK τέμνει την ΔZ στο E.

Τα τρίγωνα KBΓ και KΔZ είναι προφανώς ίσα.

Άρα $\widehat{B}_2 = \widehat{\Delta}_2$ σαν παραπληρώματα ίσων γωνιών.

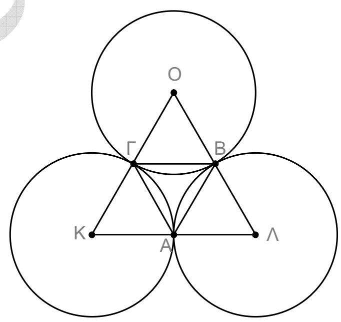
Είναι τρ.KAB = τρ.KΔE (Γ – Π – Γ)

Άρα KE = KA , δηλαδή το E είναι το συμμετρικό του A ως προς κέντρο K, άρα σταθερό.

4.

Τρεις ίσοι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο. Να αποδείξετε ότι τα σημεία επαφής είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

Προτεινόμενη λύση



Έστω (K, ρ) , (Λ, ρ) και (O, ρ) οι τρεις ίσοι κύκλοι και A , B, Γ τα σημεία επαφής

Αφού $KO = K\Lambda = \Lambda O = 2\rho$, το τρίγωνο KOΛ είναι ισόπλευρο. Οπότε $\widehat{K} = \widehat{\Lambda} = \widehat{O}$.

Τα τρίγωνα KAΓ , OBΓ και ΛAB είναι ίσα διότι

$KA = K\Gamma = \Lambda A = \Lambda B = O\Gamma = OB = \rho$ και όπως αποδείξαμε $\widehat{K} = \widehat{\Lambda} = \widehat{O}$.

Άρα $A\Gamma = AB = B\Gamma$, επομένως το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο